

다중 측정 벡터 문제에서 ISTA(Iterative Soft Thresholding Algorithm) 성능 개선에 관한 연구

노예림, 홍송남*

아주대학교

yug0099@ajou.ac.kr, *snhong@ajou.ac.kr

A Study on the Improving ISTA Performance in Mutiple Measurement Vector Problem

Noh Ye Rim, Hong Song Nam*

Ajou Univ.

요약

본 논문은 다중측정 벡터인 MMV(Mutiple Measurement Vector) 문제에 대해서 Convex optimization 기반 알고리즘인 ISTA(Iterative Soft Thresholding Algorithm)에 대해 다룬다. ISTA 알고리즘의 경우 반복적으로 찾고자 하는 값을 갱신해주어야 할 때, 그 값을 정하는 것이 중요하다. MMV 문제에서 개선된 ISTA 알고리즘에서는 값을 갱신해 줄 때, 다중 측정 값을 이용해 값을 수정하여 갱신해 개선된 ISTA 알고리즘들과 다중 측정 벡터 개수에 따른 SNR에 따른 BLER의 성능을 비교한다.

I. 서론

다중측정 벡터인 MMV(Mutiple Measurment Vector) 문제에 대해 ISTA 알고리즘을 적용한다. ISTA 알고리즘은 입력 값을 갱신해주는 부분과 Thresholding 하는 부분으로 나누어져 있다.

본 연구에서는 다중 측정 벡터에 따른 성능과 MMV일 때의 ISTA를 적용하여 M-ISTA, S-ISTA, P-ISTA를 설명하고, 기존 ISTA를 개선한 알고리즘의 SNR에 따른 BLER 성능을 살펴본다.

II. 본론

본 연구에서는 시스템, 설정 환경과 개선된 ISTA 알고리즘에 대해 소개한다.

$$y = Ax + n, \quad x \in \{0, 1\}$$

$$(y \in R^{M \times L}, A \in R^{M \times N}, x \in R^{N \times L}, M \ll N)$$

x 의 경우 구조화된 희소성을 가진 다중 벡터로써, 모든 벡터들의 1의 위치가 같음을 가정한다. underdetermined system의 경우 무수히 많은 해를 가지고 있다. 따라서 위 시스템의 목적은 노이즈가 섞인 선형 시스템에서, y, A 매트릭스를 통해 희소 다중 벡터인 x 의 최적해 x^* 를 찾는 것이다. 이를 나타낸 수식을 relaxation 하여 정의된 Lasso 문제에 대해 최적화 기반 ISTA 알고리즘을 적용하여 x 를 구한다.

Lasso 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\min_x \|y - Ax\|_2 + \lambda \|x\|_1$$

정의된 Lasso 문제의 대표적인 알고리즘인 ISTA에 대해 설명한다.

- ISTA(Iterative Soft Thresholding Algorithm)

$$x^{(k)} = S_{\lambda t_k}(x^{(k-1)} + t_k A^T(y - Ax^{(k-1)}))$$

$$S_{\lambda t_k} = \begin{cases} 0 & -\lambda < x < \lambda \\ x - \lambda \text{sign}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ISTA는 최적화 기반의 iterative 알고리즘이며, x 를 갱신하여 최종 해를

구한다. 위 시스템은 x binary한 K개의 희소성을 갖기 때문에, 최종 x 에서 가장 큰 값 K개의 support를 찾는다.

1. S-ISTA(Serial ISTA): Serial한 ISTA로, 다중 측정 벡터 y_i ($i = 1, 2, \dots, L$)를 하나씩 증가시켜 ISTA를 적용하며, x 의 값을 갱신할 때, 가장 값이 큰 K개 support를 제외한 후 0으로 처리한다. 최종 Support를 찾을 때는 최종 갱신된 $x^{(k=100)}$ 의 가장 큰 K개의 support를 찾는다.

1. S-ISTA 알고리즘

Input: y, A, K

Initial stste: $x_b^{(k)} = \vec{0}; S_b = \{0\};$

for $k = 1 : 100$

for $b = 1 : 1 : L$

update step

$$x_b^{(k)} = S_{\lambda t_k}(x_b^{(k-1)} + t_k A^T(y_b - Ax_b^{(k-1)}));$$

find support step

$$S_b = \text{maxk}(\text{sum}(x_b^{(k)}, 2), K);$$

reupdate step

$$x_b^{(k)} = x_b^{(k)}(S_b);$$

end for

end for

find final Support Step

$$S = \text{maxk}(\text{sum}(x_b^{(k)}, 2), K);$$

2. M-ISTA(MMV ISTA): 다중 벡터 x 의 값을 수정 없이 벡터 별로 ISTA에 각 반복적으로 갱신한 후 최종 x 에서 모든 벡터를 더하여 가장 큰 값 K 개의 support를 찾는다.

2. M-ISTA 알고리즘

Input: y, A, K

Initial state: $x = \vec{0}$;

for $k = 1 : 100$

update step

$$x^{(k)} = S_{\lambda t_k}(x^{(k-1)} + t_k A^T(y - Ax^{(k-1)}));$$

end for

find support step

$$S = \text{maxk}(\text{sum}(x, 2), K);$$

3. P-ISTA(Parallel Sum ISTA): 다중 벡터 x 에 대해 각 벡터에 대해 ISTA를 병렬적으로 처리하며 x 값을 갱신할 때에는 각 x 벡터의 ISTA 결과 나온 값들을 자기 자신의 벡터를 제외하고 나머지를 더한 후 다중 측정 벡터 수 - 1 만큼 나누어서 각 x 값을 갱신해준다. 최종적으로는 나온 x 벡터들의 합에서 가장 큰 값 K 개의 support를 찾는다.

3. P-ISTA 알고리즘

Input: y, A, K, L

Initial state: $x = \vec{0}$;

for $k = 1 : 100$

update step

$$x^{(k)} = S_{\lambda t_k}(x^{(k-1)} + t_k A^T(y - Ax^{(k-1)}));$$

$$x^{(k)} = \text{ones}(N, L) * \text{sum}((x^{(k)}, 2) - x^{(k)}) / (L - 1);$$

end for

find support step

$$S = \text{maxk}(\text{sum}(x^{(k)}, 2), K);$$

-. 실험 결과 및 분석

실험 결과 그림 1의 경우 P-ISTA에서 다중 측정 수에 따른 SNR 대비 BLER의 경우 L (다중 측정 수)가 증가할수록 SNR에 따른 BLER이 감소함을 확인 할 수 있다. $L=1$ 일 때는 성능이 좋지 않음을 알 수 있다. 이는 P-ISTA 알고리즘의 경우 x 의 값을 갱신할 때 자기 자신을 제외한 나머지의 다중 벡터 값을 이용해 값을 갱신해준다. 그러나, 다중 벡터가 없으므로 성능이 나오지 않는 것이다. 그림 2의 3가지 알고리즘 모두 SNR이 증가함에 따라 BLER이 감소하며 P-ISTA의 성능이 가장 좋음을 알 수 있다. 이는 x 의 값을 갱신해 줄 때 모든 x 벡터의 값을 고려하기 때문이며, S-ISTA의 경우 Serial하며 그 전 x 벡터값만을 이용하고, M-ISTA의 경우 마지막에서 다중 벡터 값을 고려하기 때문에 P-ISTA의 SNR 대비 BLER 성능이 가장 낮다.

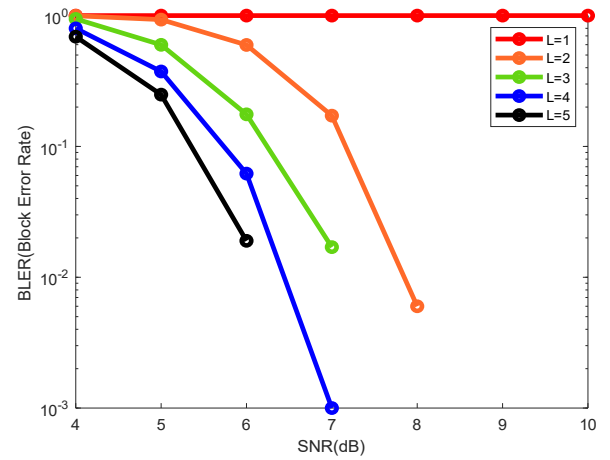


그림1. P-ISTA 알고리즘의 L 값에 따른 SNR 대비 BLER 성능

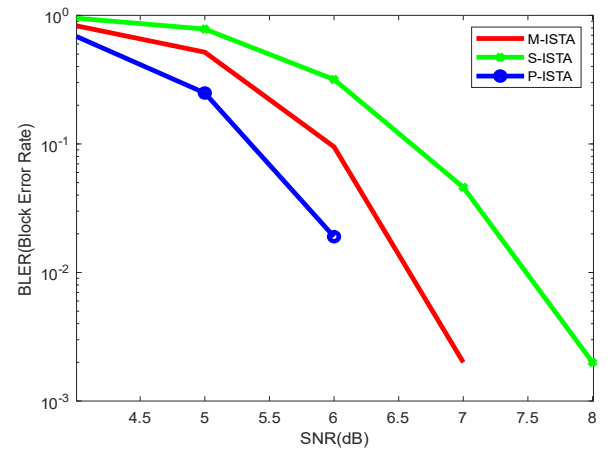


그림2. 다중 측정 수($L=5$) 일 때 SNR에 따른 BLER 성능

III. 결론

본 논문에서는 SMV(Single Measurement Vector) 일 때 사용하는 ISTA 알고리즘을 MMV(Multiple Measurement Vector) 문제로 확장하고 개선하여 적용하였다. 다중 측정 수를 고정시킨 채, 각 알고리즘을 SNR 대비 BLER 성능과 P-ISTA에서, 다중 측정 수에 따른 SNR 대비 BLER 성능을 확인하였다. 향후 MMV 문제에서 x 의 범위를 확장하여 성능 개선 방향에 대해 연구할 계획이다.

ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소가 지원하는 미래전투체계 네트워크 기술 특화연구센터 사업의 일환으로 수행되었습니다.(UD190033ED)

참고 문헌

- [1] Ding, Jie, Laming Chen, and Yuantao Gu. "Performance of orthogonal matching pursuit for multiple measurement vectors." arXiv preprint arXiv:1109.6390 (2011).
- [2] Ke, Malong, et al. "Compressive sensing based adaptive active user detection and channel estimation: Massive access meets massive MIMO." arXiv preprint arXiv:1906.09867 (2019).
- [3] Beck, Amir, and Marc Teboulle. "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems." SIAM journal on imaging sciences 2.1 (2009): 183-202.